

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

И.о.заведующего кафедрой  
уравнений в частных производных  
и теории вероятностей



А.С. Рябенко

26.03.2025

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.01.02 Системы дифференциальных уравнений  
гидродинамического типа

1. Код и наименование направления подготовки: 01.04.01 Математика
2. Профиль подготовки: Математические модели гидродинамики
3. Квалификация выпускника: Магистр
4. Форма обучения: Очная
5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета
6. Составители программы: Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей,
7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета.18.03.2025 Протокол № 0500-03
8. Учебный год: 2025/2026 Семестр(ы): 2

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели изучения дисциплины:

- построение математических моделей движения идеальных, вязких, сжимаемых, вращающихся, стратифицированных жидкостей;
- знакомство студентов с теориями деформации, напряжения, основными положениями гидродинамики;
- сформировать навыки и способности математического моделирования различных задач гидродинамики;
- сформировать навыки анализа результатов гидродинамических экспериментов, анализировать сформулированные научные утверждения, понимать механический смысл уравнений гидродинамики;

Задачи учебной дисциплины:

- сформировать компетенции в области постановки основных задач гидродинамики;
- сформировать способность применения методов математического моделирования при изучении реальных процессов гидродинамики с целью нахождения эффективных решений общенаучных и прикладных задач широкого профиля.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Системы уравнений гидродинамического типа» относится к Блоку 2 вариативной части курсов по выбору части, формируемой участниками образовательных отношений.

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: Малые колебания стратифицированной жидкости, Стохастические дифференциальные уравнения, Введение в общую теорию математических моделей неньютоновых сред.

Дисциплина является предшествующей для курсов Оптимальное управление эволюционными процессами в гидросетях, Начально-краевые задачи для параболических уравнений, Асимптотики решений дифференциальных уравнений,

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен решать задачи аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач математической гидродинамики	ПК-1.1	Обладает большим объемом знаний в области математической гидродинамики	Знать: актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики, теоретической гидродинамики.  Уметь: решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики, теоретической гидродинамики.  Владеть: теоретическими подходами к созданию математических моделей гидродинамики.
		ПК-1.2.	Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области	Знать: основные понятия и методы решений уравнений математической физики  Уметь: решать и исследовать задачи для уравнений в частных производных  Владеть: методами моделирования различных процессов в гидродинамике

			математической гидродинамики	
		ПК-1.3.	Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики	<p>Знать: методы решения задач для уравнений с частными производными</p> <p>Уметь: работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представлять свои результаты</p> <p>Владеть: Методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения для исследования гидродинамических моделей</p>
ПК-2	Способен проводить анализа научных данных и результатов экспериментов в моделях математической гидродинамики	ПК-2.1	Владеет современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации	<p>Знать: современные методы построения математических моделей гидродинамики</p> <p>Уметь: проводить исследования математических моделей гидродинамики</p> <p>Владеть: современными методами сбора и анализа исследуемого материала в области гидродинамического моделирования.</p>
		ПК-2.2	Умеет анализировать результаты экспериментов, анализировать сформулированные научные утверждения	<p>Знать: методы анализа экспериментальных данных и их использования для построения математических моделей гидродинамики</p> <p>Уметь: анализировать результаты экспериментов, анализировать сформулированные научные утверждения</p> <p>Владеть: методами исследования гидродинамических моделей</p>
		ПКВ-2.3	Имеет практический опыт экспериментальной деятельности в области математической гидродинамики	<p>Знать: методы анализа математических моделей гидродинамики</p> <p>Уметь: применять методы анализа математических моделей гидродинамики</p> <p>Владеть: навыками исследования сложных математических моделей</p>

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 2 / 72.

Форма промежуточной аттестации Зачет – 2 семестр

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			2 семестр
Контактная работа		28	28
в том числе:	лекции	14	14
	практические	14	14
	лабораторные	-	-
	курсовая работа	-	-
	контрольные работы	-	-
Самостоятельная работа		44	44
Промежуточная аттестация		-	-
Итого:		<b>72</b>	<b>72</b>

### 13.1. Содержание дисциплины (последний столбец надо заполнить)

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Теория напряжений	<p>Поверхностные и объемные силы. Напряжения. Система обозначений. Закон парности касательных напряжений. Напряжения на наклонных площадках</p> <p>Перемещения. Линейные и угловые деформации. Формулы Коши.</p>	<p>Глушко А.В. Математическое моделирование гидродинамических процессов / А.В. Глушко, В.Е. Петрова. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2013. – 79 с.</p> <p><a href="http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-YTah85oGLP.pdf">.http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-YTah85oGLP.pdf</a></p>
1.2	Теория деформаций	<p>Перемещения. Линейные и угловые деформации. Формулы Коши.</p>	
1.3	Гидродинамика	<p>Основы гидродинамики. Распределение скоростей в произвольно малой частице сплошной среды. Роль слагаемого <math>\nabla\Phi</math> в представлении <math>\vec{v}^1 = \vec{v} + \nabla\Phi + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \rho_0 \cdot o(1)</math>.</p> <p>Формула дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера. Уравнения движения сплошной среды. Ограничения, налагаемые уравнением количества движения на напряжения. Дальнейшие преобразования уравнений движения сплошной среды. Тензорная поверхность тензора напряжений</p> <p>Идеальная жидкость. Идеальная жидкость и газ. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера). Уравнения движения идеальной жидкости в форме Громеки-Лемба</p> <p>Вязкая жидкость. Определение вязкой жидкости. Закон Навье-Стокса. Изотропная среда. Доказательство представлений коэффициентов зависимости <math>B_{ijpq}</math> из закона Навье-Стокса. Закон Навье-Стокса для изотропной вязкой среды. Уравнения движения изотропной жидкости. Вязкая несжимаемая жидкость. Линеаризация уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости</p> <p>Сжимаемые и стратифицированные жидкости. Сжимаемые жидкости. Уравнения движения. Уравнения движения сжимаемой жидкости во вращающейся системе координат. Стратифицированные жидкости. Физический смысл частоты Вейселя-Брента. Система уравнений, описывающая внутренние гравитационно-гироскопические волны</p>	

	<b>2. Практические занятия</b>		
1.1	Теория напряжений	Закон парности касательных напряжений. Напряжения на наклонных площадках	Глушко А.В. Математическое моделирование гидродинамических процессов / А.В. Глушко, В.Е. Петрова. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2013. – 79 с.  .http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-YTah85oGLP.pdf
1.2	Теория деформаций	Перемещения. Линейные деформации Угловые деформации. Формулы Коши. Объемная деформация.	
1.3	Гидродинамика	Общее уравнение движения жидкого объема Напряжение в жидкой среде Теорема Коши-Гельмгольца Уравнения Эйлера. Модели жидких идеальных сред Понятие вязкой жидкости Закон Навье-Стокса. Модели жидких вязких сред.	
1.4	Частные случаи и примеры	Основные свойства потенциального движения несжимаемой жидкости в односвязных областях (свойства гармонических функций: принцип максимума, теорема о среднем; простейшие внутренние краевые задачи для уравнения Лапласа). Плоские задачи о движении тел в идеальной жидкости (примеры постановок внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа). Стационарное течение вязкой однородной жидкости в трубах: а) течение в трубах с круговым и эллиптическим сечениями (краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге); б) течение в трубе с прямоугольным сечением и течение в плоском канале с твердыми стенками (краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике). Распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении сферы (краевая задача Неймана для уравнения Лапласа вне шара).	
		Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением (начально-краевая задача Дирихле для уравнения теплопроводности в круге). Нестационарные слоистые течения: тангенциальный разрыв (задача Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой).	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Теория напряжений	4	2		4	10
2	Теория деформаций	4	2		4	10
3	Гидродинамика	6	2		4	12
4	Частные случаи и примеры	0	8		32	40
	Итого:	14	14		44	72

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Системы уравнений гидродинамического типа» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в семестрах, на которую отводится 44 часа.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Система уравнений гидродинамического типа» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущей аттестации (контрольная работа в виде тестов и выполнению практических заданий) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно

осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям (2 семестр – зачет)

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (2 семестр – зачет)

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

### а) основная литература

№ п/п	Источник
1	Учайкин, В. В. Механика. Основы механики сплошных сред : учебник / В. В. Учайкин. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 860 с. — ISBN 978-5-8114-2235-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/91899">https://e.lanbook.com/book/91899</a>
2	Учайкин, В. В. Механика. Основы механики сплошных сред. Задачи с указаниями и ответами : учебное пособие / В. В. Учайкин. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-2803-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/101845">https://e.lanbook.com/book/101845</a>

### б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Глушко А.В. Математические модели в гидродинамике / А.В. Глушко, В.П. Глушко. — Воронеж, 2003. — № 625. — 38 с. <a href="http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&amp;op=view_file&amp;lid=40">http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&amp;op=view_file&amp;lid=40</a>
2	Глушко А.В. Математическое моделирование гидродинамических процессов / А.В. Глушко, В.Е. Петрова. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2013. — 79 с. . <a href="http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-YTah85oGLP.pdf">http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-YTah85oGLP.pdf</a>

### в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1	<a href="http://eqworld.ipmnet.ru">http://eqworld.ipmnet.ru</a> – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений
2	<a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a> - электронный каталог ЗНБ ВГУ
3	<a href="http://www.kuchp.ru">http://www.kuchp.ru</a> – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Глушко А.В. Математические модели в гидродинамике / А.В. Глушко, В.П. Глушко. — Воронеж, 2003. — № 625. — 38 с. <a href="http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&amp;op=view_file&amp;lid=40">http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&amp;op=view_file&amp;lid=40</a>

2	Глушко А.В. Математическое моделирование гидродинамических процессов / А.В. Глушко, В.Е. Петрова. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2013. – 79 с. . <a href="http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-YTah85oGLP.pdf">http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-YTah85oGLP.pdf</a>
---	---

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ»

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, *Calc*, *Math*, браузер Mozilla Firefox, Opera или Google Chrome.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:** Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам. Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой (ауд. 310), расположенный на 3 этаже учебного корпуса № 1, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

**19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
01	Теория напряжений	ПК-1, ПК-2	ПК-1.1-ПК-1.3, ПК-2.1-ПК-2.3	Домашние задания, опросы, проверка конспектов
02	Теория деформаций			Домашни задания, опросы, проверка конспектов
03	Гидродинамика			Домашние задания, тестовые задания
04	Работа над эссе			Эссе
Промежуточная аттестация Форма контроля – эссе				Список тем эссе

**20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания**

**20.1. Текущий контроль успеваемости**

Контроль текущей успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью домашних заданий, опросов, проверок конспектов и контрольной работы в виде тестов.

**Комплект тестов**



### Вариант № 3

#### 1. Вставьте пропущенное в определении слово.

В формулах Коши  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ ;  $\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$ ;  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$  величины

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – есть линейные ..... по направлениям координатных осей  $Ox, Oy, Oz$  соответственно.

#### 2. Вставьте пропущенное слово в названии уравнений.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\quad (*)$$

Уравнения (\*) называются уравнениями .....

Зачтено за контрольную работу ставится в случае правильного ответа на вопросы билета. В противном случае ставится оценка «незачтено».

### 20.2. Промежуточная аттестация

**Промежуточная аттестация** предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Системы уравнений гидродинамического типа» проводится в форме сдачи зачета (написание эссе)

При промежуточной аттестации семестра уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками **«зачтено»** и **«не зачтено»**, которые формируются следующим образом.

#### Список вопросов к промежуточной аттестации. Темы Эссе

1. Поверхностные и объемные силы. Напряжения. Система обозначений.
2. Закон парности касательных напряжений.
3. Напряжения на наклонных площадках.
4. Перемещения. Линейные и угловые деформации. Формулы Коши.
5. Распределение скоростей в произвольно малой частице сплошной среды.
6. Роль слагаемого  $\nabla\Phi$  в представлении  $\vec{V}^1 = \vec{V} + \nabla\Phi + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \rho_0 \cdot \mathcal{O}(1)$ .
7. Теорема Коши-Гельмгольца.
8. Формула дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему.
9. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера.
10. Уравнения движения сплошной среды.
11. Ограничения, налагаемые уравнением количества движения на напряжения.
12. Дальнейшие преобразования уравнений движения сплошной среды. Тензорная поверхность тензора напряжений.
13. Идеальные жидкость и газ. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера).

14. Уравнения движения идеальной жидкости в форме Громеки-Лемба.
15. Определение вязкой жидкости. Закон Навье-Стокса.
16. Изотропная среда. Доказательство представлений коэффициентов зависимости  $B_{ijpq}$  из закона Навье-Стокса.
17. Закон Навье-Стокса для изотропной вязкой среды.
18. Уравнения движения изотропной жидкости. Вязкая несжимаемая жидкость.
19. Линеаризация уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости.
20. Сжимаемые жидкости. Уравнения движения.
21. Уравнения движения сжимаемой жидкости во вращающейся системе координат.
22. Стратифицированные жидкости. Физический смысл частоты Вейсяля-Брента.
23. Система уравнений, описывающая внутренние гравитационно-гироскопические волны.

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Обучающийся не владеет основами учебно-программного материала, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий. Как правило, оценка "не зачтено" ставится студентам, которые не могут продолжить обучение или приступить к профессиональной деятельности по окончании вуза без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.	<b>«Не зачтено»</b>
Обучающийся владеет знаниями основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справляющийся с выполнением заданий, предусмотренных программой, знакомый с основной литературой, рекомендованной программой.	<b>"Зачтено"</b>